第28卷 第3期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 28 No. 3
2011年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0380-05

基于 Perron 补的 Z-矩阵最小特征值界的估计

杨志明

(甘肃联合大学数信学院，兰州 730000)

摘　要: 本文给出了估计不可约 Z-矩阵的最小特征值上下界的一种简单方法，即以矩阵的广义 Perron 补为基础，将不可约 Z-矩阵 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 的最小特征值问题化为广义 Perron 补 $P_{s-\rho(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha)$ 的最小特征值问题，然后利用矩阵范数的性质导出了 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值界的估计式，同时也给出了非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径的一种简单估计式.

关键词: Z-矩阵；Perron 补；非负不可约矩阵；谱半径

分类号: **AMS**(2000) 65F15; 65F35　　**中图分类号**: O241.6　　**文献标识码**: A

1　引言

Z-矩阵是比 M-矩阵更广泛的矩阵．工程实践中的许多振动问题，如桥梁、建筑物的振动、机械机件、飞机机翼的振动及稳定性分析问题常需要对其最小特征值的界进行估计．文献 [1] 利用相似变换得到了一种同步计算最小特征值及特征向量的方法．Meyer[2] 和 Lu[3] 先后提出了非负不可约矩阵的 Perron 补及广义 Perron 补的概念．本文以这些概念为基础，通过 Z-矩阵与非负矩阵及其广义 Perron 补的关系来研究 Z-矩阵的最小特征值的上下界问题.

Z-矩阵就是非对角线上的元素小于等于零的矩阵，可表为 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}\geq 0$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵．而且若 $\boldsymbol{A}$ 为不可约矩阵，则 $\boldsymbol{B}$ 为非负不可约矩阵.

若分别用 $\omega(\boldsymbol{A})$ 和 $\rho(\boldsymbol{B})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值和非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径，则

$$\omega(\boldsymbol{A})=s-\rho(\boldsymbol{B}). \tag{1}$$

引理 1[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非负不可约矩阵，且 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\,(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\min_i r_i=r(\boldsymbol{A})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A})=\max_i r_i. \tag{2}$$

引理 2[4]　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数 $\|\boldsymbol{A}\|<1$，则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 非奇异，且

$$\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|\leq\frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|}.$$

另设 $\langle n\rangle=\{1,2,\cdots,n\}$，$\alpha$ 为 $\langle n\rangle$ 的非空有序子集，$\beta=\langle n\rangle\setminus\alpha$，则有：

定义 1[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是谱半径为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的 n 阶非负不可约矩阵，对 $\alpha\subset\langle n\rangle$，用 $\boldsymbol{A}[\alpha,\beta]$ 表示元素为 a_{ij} 的子矩阵，其中 $i\in\alpha$，$j\in\beta$，$\boldsymbol{A}[\alpha]$ 等价于 $\boldsymbol{A}[\alpha,\alpha]$，则 $\boldsymbol{A}[\alpha]$ 的广义 Perron 补定义为

$$P_t\big(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha]\big)=\boldsymbol{A}[\beta]+\boldsymbol{A}[\beta,\alpha]\big(tI-\boldsymbol{A}[\alpha]\big)^{-1}\boldsymbol{A}[\alpha,\beta],\quad t>\rho\big(\boldsymbol{A}[\alpha]\big).$$

收稿日期: 2009-06-15.　**作者简介**: 杨志明 (1965年8月生)，男，副教授. 研究方向：数值代数.

当 $t=\rho(\boldsymbol{A})$ 时，称之为 Perron 补，并记为

$$P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha])=\boldsymbol{A}[\beta]+\boldsymbol{A}[\beta,\alpha]\big(\rho(\boldsymbol{A})I-\boldsymbol{A}[\alpha]\big)^{-1}\boldsymbol{A}[\alpha,\beta].$$

引理 3[3] 设 $\boldsymbol{A}$ 是谱半径为 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的非负不可约矩阵，则对任意 $t>\rho(\boldsymbol{A}[\alpha])$，$\boldsymbol{A}[\alpha]$ 的广义 Perron 补 $P_t(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha])$ 也是非负不可约矩阵，且

(a) 当 $t=\rho(\boldsymbol{A})$ 时，$\rho(P_t(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha]))=\rho(P(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha]))=\rho(\boldsymbol{A})$；

(b) $\rho(P_t(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha]))$ 是关于 t 的严格递减函数.

2 $\omega(P_t(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha]))$ 与 $\rho(\boldsymbol{B})$ 之间的关系

对 $\alpha\subset\langle n\rangle$, $\beta=\langle n\rangle\setminus\alpha$，为叙述方便，记

$$\boldsymbol{B}[\alpha]=\boldsymbol{B}_\alpha,\quad \boldsymbol{B}[\alpha,\beta]=\boldsymbol{B}_{\alpha\beta},\quad \boldsymbol{B}[\beta,\alpha]=\boldsymbol{B}_{\beta\alpha},\quad \boldsymbol{B}[\beta]=\boldsymbol{B}_\beta,$$

且不妨设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_\alpha & \boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\\ \boldsymbol{B}_{\beta\alpha} & \boldsymbol{B}_\beta\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha & -\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\\ -\boldsymbol{B}_{\beta\alpha} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\beta\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_\alpha=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha.$$

于是，$\boldsymbol{B}_\alpha$ 的 Perron 补

$$P(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)=\boldsymbol{B}_\beta+\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\big(\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha\big)^{-1}\boldsymbol{B}_{\alpha\beta},\quad \rho(\boldsymbol{B})>\rho(\boldsymbol{B}_\alpha),$$

而 $\boldsymbol{A}_\alpha$ 的广义 Perron 补

$$\begin{aligned}P_{s-t}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha)&=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\beta+(-\boldsymbol{B}_{\beta\alpha})\big[(s-t)\boldsymbol{I}-(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha)\big]^{-1}(-\boldsymbol{B}_{\alpha\beta})\\&=s\boldsymbol{I}-\big[\boldsymbol{B}_\beta+\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}(t\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha)^{-1}\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\big]=s\boldsymbol{I}-P_t(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha),\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $s-t>\rho(\boldsymbol{A}_\alpha)$. 由 (3) 式即得：

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{B}\geq 0)$ 为不可约 Z-矩阵，且 $s>t+\rho(\boldsymbol{A}_\alpha)$，则

$$\omega\big(P_{s-t}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha)\big)=s-\rho\big(P_t(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)\big).$$

由 (1) 式及引理 3 (a)，显然有：

推论 1 设 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 为不可约 Z-矩阵，且 $s>\rho(\boldsymbol{B})+\rho(\boldsymbol{A}_\alpha)$，则

$$\omega\big(P_{s-\rho(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha)\big)=s-\rho(\boldsymbol{B})=\omega(\boldsymbol{A}).$$

特别地，若 $s=2\rho(\boldsymbol{B})$，则

$$\omega\big(P_{\rho(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha)\big)=\omega(\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{B}).$$

这就是说，计算不可约 Z-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值，只需计算广义 Perron 补 $P_{s-\rho(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha)$ 的最小特征值，但此时却需要知道 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的值，因而实际操作中是行不通的. 事实上，我们可以利用推论 1 的结论来估计 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的界，进而确定 $\omega(\boldsymbol{A})$ 的界.

3 不可约 Z-矩阵最小特征值的界

首先，由 (1) 式及引理 1 可知，不可约 Z-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值满足

$$s-R(\boldsymbol{B})\leq\omega(\boldsymbol{A})\leq s-r(\boldsymbol{B}). \tag{4}$$

另由推论 1 知，$s-\rho(\boldsymbol{B})$ 是

$$P_{s-\rho(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}[\alpha])=s\boldsymbol{I}-\left[\boldsymbol{B}_\beta+\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\left(\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\right]$$

的一个特征值，所以存在 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，使

$$\left[s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{B}_\beta+\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\left(\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\right)\right]\boldsymbol{x}=\left(s-\rho(\boldsymbol{B})\right)\boldsymbol{x}$$

成立．两边取范数并由范数的性质 $\|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\|\leq\|\boldsymbol{C}\|+\|\boldsymbol{D}\|$，其中 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为同型矩阵，可得

$$\begin{aligned}&|s-\rho(\boldsymbol{B})|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\\ \leq\ &\left\|s\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{B}_\beta+\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\left(\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha\right)^{-1}\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\right)\right\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\\ \leq\ &\left[\|s\boldsymbol{I}\|+\|\boldsymbol{B}_\beta\|+\|\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\|\cdot\|(\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha)^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\|\right]\cdot\|\boldsymbol{x}\|,\end{aligned} \tag{5}$$

若 $\rho(\boldsymbol{B})>\|\boldsymbol{B}_\alpha\|$，则由引理 2 知矩阵 $\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha$ 非奇异，且

$$\left\|\left(\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_\alpha\right)^{-1}\right\|=\frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}\left\|\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})}\boldsymbol{B}_\alpha\right)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\rho(\boldsymbol{B})-\|\boldsymbol{B}_\alpha\|}.$$

又因为 $s>\rho(\boldsymbol{B})+\rho(\boldsymbol{A}_\alpha)>\rho(\boldsymbol{B})$，$\|\boldsymbol{x}\|>0$，所以 (5) 式可化为

$$s-\rho(\boldsymbol{B})\leq s+\|\boldsymbol{B}_\beta\|+\frac{\|\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\|}{\rho(\boldsymbol{B})-\|\boldsymbol{B}_\alpha\|},$$

即

$$\rho^2(\boldsymbol{B})-\left(\|\boldsymbol{B}_\alpha\|-\|\boldsymbol{B}_\beta\|\right)\rho(\boldsymbol{B})+\left(\|\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\|-\|\boldsymbol{B}_\alpha\|\cdot\|\boldsymbol{B}_\beta\|\right)\geq 0.$$

由此得

$$\rho(\boldsymbol{B})\geq\frac{1}{2}\left[\left(\|\boldsymbol{B}_\alpha\|-\|\boldsymbol{B}_\beta\|\right)+\sqrt{\left(\|\boldsymbol{B}_\alpha\|+\|\boldsymbol{B}_\beta\|\right)^2-4\|\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\|}\right]\stackrel{\text{def}}{=}t_1. \tag{6}$$

完全类似地，由范数的性质 $|\|\boldsymbol{C}\|-\|\boldsymbol{D}\||\leq\|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\|$ 又可得到

$$\rho(\boldsymbol{B})\leq\frac{1}{2}\left[\left(\|\boldsymbol{B}_\alpha\|+\|\boldsymbol{B}_\beta\|\right)+\sqrt{\left(\|\boldsymbol{B}_\beta\|-\|\boldsymbol{B}_\alpha\|\right)^2+4\|\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\|}\right]\stackrel{\text{def}}{=}t_2. \tag{7}$$

综上可得以下定理：

定理 2 设 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 为不可约 Z-矩阵，则当 $\rho(\boldsymbol{B})>\|\boldsymbol{B}_\alpha\|$ 时，$t_1\leq\rho(\boldsymbol{B})\leq t_2$．进而有 $s-t_2\leq\omega(\boldsymbol{A})\leq s-t_1$．

4　数值例子与界的改进

例 1　对 Z-矩阵 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3&0&2&7&8\\4&8&3&4&8&7\\7&0&3&1&6&7\\5&7&0&1&2&1\\0&5&4&5&4&4\\2&2&1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

显然 $r(\boldsymbol{B})=6$，$R(\boldsymbol{B})=34$，故由 (4) 式可得 $s-34\le\omega(\boldsymbol{A})\le s-6$．现取 $\alpha=\{6\}$，则 $\beta=\{1,2,\cdots,5\}$，即将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分块为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_\beta&\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\\\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}&\boldsymbol{B}_\alpha\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccccc|c}0&3&0&2&7&8\\4&8&3&4&8&7\\7&0&3&1&6&7\\5&7&0&1&2&1\\0&5&4&5&4&4\\\hline 2&2&1&1&0&0.\end{array}\right).$$

若用矩阵的行范数 $\|\cdot\|_\infty$，则 $\|\boldsymbol{B}_\alpha\|_\infty=0$，$\|\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\|_\infty=6$，$\|\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}\|_\infty=8$，$\|\boldsymbol{B}_\beta\|_\infty=27$．从而由 (6),(7) 两式得

$$-1.9134=\frac{1}{2}\Big[-27+\sqrt{27^2-4\times6\times8}\,\Big]\le\rho(\boldsymbol{B})\le\frac{1}{2}\Big[27+\sqrt{27^2+4\times6\times8}\,\Big]=28.6740,$$

进而有 $s-28.6740\le\omega(\boldsymbol{A})\le s+1.9134$.

显然，这里得到的 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的下界 $t_1=-1.9134$ 没有 (2) 式给出的下界 $r(\boldsymbol{B})=6$ 精确．事实上，由 (6) 式给出的 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的下界在许多情况下是无法使用的，因为被开方数很可能小于零，但上界却更接近于 $\rho(\boldsymbol{B})$ $(=20.5044)$．正因为这样，实际应用时常用 (7) 式估计 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的一个上界，而用下面的定理确定一个更为精确的下界.

定理 3　设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_\alpha&\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\\\boldsymbol{B}_{\beta\alpha}&\boldsymbol{B}_\beta\end{pmatrix}$$

为非负不可约矩阵，且 $\rho(\boldsymbol{B})>\|\boldsymbol{B}_\alpha\|$，$t_2$ 由 (7) 式给出，则 $\rho(\boldsymbol{B})\ge\rho(P_{t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha))$.

证明　由 (7) 式知 $\rho(\boldsymbol{B})\le t_2$，故由引理 3，得

$$\rho(\boldsymbol{B})=\rho\big(P_{\rho(\boldsymbol{B})}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)\big)\ge\rho\big(P_{t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)\big).$$

推论 2　设 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 为不可约 Z-矩阵，则当 $\rho(\boldsymbol{B})>\|\boldsymbol{B}_\alpha\|$ 时，有

$$s-t_2\le\omega(\boldsymbol{A})\le s-\rho\big(P_{t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)\big)=\omega\big(P_{s-t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)\big).$$

如例1中取$\alpha = \{6\}$时，由前面的计算知$t_2 = 28.6740$．进而有$\rho(P_{t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)) = 20.0662$，即$Z$-矩阵$\boldsymbol{A}$的最小特征值满足$s - 28.6740 \le \omega(\boldsymbol{A}) \le s - 20.0662$．这显然比$s - 34 \le \omega(\boldsymbol{A}) \le s - 6$精确得多．

本文给出了估计不可约Z-矩阵$\boldsymbol{A} = s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$的最小特征值上下界的一种简单方法，其实质还在于估计非负不可约矩阵$\boldsymbol{B}$的谱半径，即

$$\rho\big(P_{t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha)\big) \le \rho(\boldsymbol{B}) \le t_2, \tag{8}$$

且由(8)式给出的下界非常接近于$\rho(\boldsymbol{B})$的真值．如例1中非负不可约矩阵$\boldsymbol{B}$的谱半径$\rho(\boldsymbol{B}) = 20.5044$，而由(8)式得到$\rho(\boldsymbol{B}) \ge 20.0662$．正因为如此，本文的方法也可用于估计非负不可约矩阵谱半径的上下界，尤其是下界．表1给出了由Matlab随机生成的元素介于$0 \sim 9$之间的n阶非负不可约矩阵$\boldsymbol{B}$(=fix(10*rand(n)))，当$n = 10, 30, 50$时，由(2),(8)两式得到的上下界，可以看出，本文的方法能够在很大程度上改进经典的Frobenius不等式(2)．

表1： 非负不可约矩阵的谱半径估计

n	公式(2)		公式(8)		$\rho(\boldsymbol{B})$
	$r(\boldsymbol{B})$	$R(\boldsymbol{B})$	$\rho(P_{t_2}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}_\alpha))$	t_2	
10	39.0000	57.0000	46.6827 ($\alpha = \{6\}$)	56.1127	47.6501
30	92.0000	161.0000	134.2035 ($\alpha = \{17\}$)	157.0000	135.1406
50	183.0000	269.0000	226.0547 ($\alpha = \{48\}$)	267.0671	226.8915

参考文献：

[1] 段复建，张可村. Z-矩阵最小特征值及特征向量的数值算法[J]. 工程数学学报，2007, 24(3): 563-566
Duan F J, Zhang K C. A numerical algorithm for the minimal eigenvalue and its eigenvector of Z-matrix[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(3): 563-566

[2] Meyer C D. Uncoupling the Perron eigenvector problem[J]. Linear Algebra and its Applicaions, 1989, 114/115: 69-94

[3] Lu L Z. Perron complement and Perron root[J]. Linear Algebra and its Applicaions, 2000, 341: 239-248

[4] 黄廷祝，杨传胜. 特殊矩阵分析与应用[M]. 北京：科学出版社，2007
Huang T Z, Yang C S. Analysis and Application of Special Matrices[M]. Beijing: Science Press, 2007

Estimating the Bounds of the Smallest Eigenvalue of Z-matrix with Perron Complement

YANG Zhi-ming

(College of Mathematics and Information, Gansu Lianhe University, Lanzhou 730000)

Abstract: In this paper, we present a simple method to estimate the lower and upper bounds for the smallest eigenvalue of irreducible Z-matrices, the method is based on the generalized Perron complement. For the smallest eigenvalue problem of the irreducible Z-matrix $A = sI - B$, we convert it into the smallest eigenvalue problem of a generalized Perron complement. Then we utilize the properties of matrix norms and obtain the estimation of the bounds for the smallest eigenvalue of A. Moreover, we give a simple estimation for the spectral radius of a nonnegative irreducible matrix.

Keywords: Z-matrix; Perron complement; nonnegative irreducible matrix; spectral radius

Received: 15 June 2009. **Accepted:** 28 Apr 2010.